بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

سمینار کارشناسی ارشد

گرایش آنالیز ریاضی

پیوستگی خودکار همریختی ها ومدول همریختی ها روی جبرهای باناخ وجبرهای توپولوژیک

استاد راهنما

دکتر علیرضا امینی هرندی

استاد مشاور

دکتر حمید شایان پور

پژوهشگر

آسیه صادقی

آبان ۱۳۹۱

چکیده

یک قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های $k(\cdot)$-انقباضی جهتی مجموعه مقدار در یک فضای متریک کامل اثبات می‌کنیم که تعمیمی است از نتایج مشابه برای نگاشت‌های $k(\cdot)$-انقباضی و انقباضی جهتی. چنین قضیه‌ای امکان به دست آوردن قضایای نقطه ثابت برای رده‌های پیشین نگاشت‌های مجموعه مقدار را فراهم می‌کند بدون فرضیات دیگری چون متری محدب بودن.

مقدمه

نظریه نقطه ثابت به عنوان یک موضوع مناسب در ریاضی محض و کاربردی، یک شاخه‌ی رشد یافته از آنالیز غیر خطی محسوب می‌شود که در جهات مختلفی گسترش یافته است. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $f : X \to X$ یک نگاشت تک مقداری یا مجموعه مقدار باشد. در مبحث نظریه نقطه ثابت به دنبال پاسخ به این سؤال هستیم که چه شرایطی بر مجموعه‌ی X یا بر زیر مجموعه‌های آن و یا نگاشت f تعریف شده روی مجموعه مورد نظر، وجود نقطه ثابت را برای این نگاشت‌ها تضمین می‌کند.

نظریه نقطه ثابت توپولوژیک، برای نخستین بار در سال ۱۹۱۲ توسط براوور [1] [؟] مطرح گردید. وی X را یک فضای باناخ در نظر گرفت و نشان داد اگر $K \subseteq X$ ناتهی، محدب و فشرده باشد آنگاه هر نگاشت پیوسته $f : K \to K$ نقطه ثابت خواهد داشت.

اما سمینار حاضر، روی نظریه نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی در فضاهای متریک متمرکز است.

اساس نظریه نقطه ثابت متریک، اصل انقباضی باناخ [2] [؟] می‌باشد که در سال ۱۹۲۲ معرفی شد. این اصل دارای کاربردهای فراوانی از جمله اثبات وجود جواب‌هایی برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی و معادلات انتگرال غیر خطی در فضاهای باناخ می‌باشد. به عنوان مثال، معادله جبری $\sin x + x - ۱ = ۰$ را می‌توان با در نظر گرفتن $f(x) = ۱ - \sin x = x$ به یک مسأله‌ی نقطه ثابت تبدیل کرد.

در این زمینه، ما شاهد پیشرفت‌های فراوانی در دهه‌های اخیر بوده‌ایم که از میان آنها، دو گسترش بنیادی از تحقیقات انجام شده روی موضوع، مطرح شده است.

در مرحله‌ی اول، نخستین گسترش از اصل انقباضی باناخ به نگاشت‌های چند مقداری است، که در سال ۱۹۶۹ توسط نادلر [3] [؟] مطرح شد. پس از آن در سال ۱۹۷۲، رایش [4] [؟] با بررسی نگاشت‌های چند مقداری با فاکتورهای انقباضی مختلف، به نتایجی جدید در زمینه نقطه ثابت دست یافت و به این ترتیب، نتایج مشابه ثابت شده برای نگاشت‌های تک مقداری را به حالت مجموعه مقدار، توسعه داد.

فاز دوم پیشرفت در سال ۱۹۸۳ با حدس رایش به اوج خود رسید که البته هنوز هم به طور کامل پاسخ داده نشده است. مسأله‌ی باز رایش به این صورت مطرح شد که:

فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک تام و $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد به قسمی که:

$$\mathcal{H}\ (Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

که $\alpha : [۰, \infty) \to [۰, ۱)$ دارای این خاصیت است که $\limsup_{r \to t^+} \alpha(r) < ۱$ برای هر $t > ۰$.

آیا T یک نقطه ثابت دارد؟

1. Brouwer
2. Banach's contraction principle
3. J. B. Nadler
4. S. Reich

این مسأله توسط خود رایش، برای زیر مجموعه‌های فشرده X (به جای بسته و کراندار در این مسأله) ثابت شده است.

جهت دیگر تحقیق، به توسیع نتایج معتبر قبلی برای نگاشت‌های تک مقداری به نگاشت‌های مجموعه مقدار با خواص انقباض جهتی، منجر شد. اخیرا" سانگ [1] [؟] با دست یابی به نتایجی جدید در این زمینه، نشان داد که این نتایج حتی نگاشت‌های انقباضی کلاسیک(نه جهتی) را می‌توانند گسترش دهند.

ما بر آنیم تا با بررسی انقباضات مجموعه مقدار جهتی با فاکتور انقباضی متغیر، توسعه‌ی چنین نظریه‌ای را ادامه دهد.

1. W. Song

۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

۲ نگاشت‌های $k(\cdot)$-انقباضی جهتی مجموعه مقدار

۳ نتایج وابسته

مراجع

[] دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهر کرد، در زیر نمونه‌ای از نحوه‌ی نوشتن مراجع آورده شده است. شما حتما حتما حتما باید به این صورت مراجع را بنویسید(به ترتیب حروف الفبای انگلیسی **نام خانوادگی** نویسندگان).

[1] R. P. Agarwal, I. Kiguradze, On multi-point boundary value problems for linear ordinary ccdifferential equations with singularities, Journal of Mathematical Analysis and ccApplications 297 (2004) 131–151.

[2] Z. J. Du, Solvability of functional differential equations with multi-point boundary value problems at resonance, Computers and Mathematics with Applications 55 (2008) 2653-2661.

[3] W. Feng, J. R. L. Webb, Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth, Journal of Mathematical Analysis and Applications 212 (1997) 467–480.

[4] F. Z. Geng, Solving singular second order three-point boundary value problems using reproducing kernel Hilbert space method, Applied Mathematics and Computation 215 (2009) 2095–2102.

[5] M. K. Kwong, The shooting method and multiple solutions of two/multi-point BVPs of second-order ODE, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 6 (2006) 1–14.

[6] Y. Z. Lin, J. N. Lin, Numerical algorithm about a class of linear nonlocal boundary value problems, Applied Mathematics Letters 23 (2010) 997–1002.

[7] Y. Z. Lin, Minggen Cui, A numerical solution to nonlinear multi-point boundary value problems in the reproducing kernel space, Mathematical Methods in the Applied Sciences 34 (2011) 44–47.

[8] M. Moshiinsky, Sobre los problemas de condiciones a la frontiera en una dimension discontinuas, Boletin De La Sociedad Matematica Mexicana 7 (1950) 1–25.

[9] M. R. Scott, W. H. Vandevender, A comparison of several invariant inbedding algorithms for the solution of two-point boundary value problems, Applied Mathematics and Computation 1 (1975) 187–218.

[10] M. R. Scott, H. A. Watts, Computational solution of linear two-point boundary value problems via orthonormalization, SIAM Journal on Numerical Analysis 14 (1977) 40–70.

[11] M. R. Scott, H. A. Watts, SUPORT-A Computer Code for Two-Point Boundary-Value Problems via Orthonormalization, SAND75-0198, Sandia Laboratories, Albuquerque, NM, 1975.

[12] M. Tatari, M. Dehghan, The use of the Adomian decomposition method for solving multipoint boundary value problems, Physica Scripta 73 (2006) 672–676.

[13] H. B. Thompson, C. Tisdell, Three-point boundary value problems for second-order ordinary differential equation, Mathematical and Computer Modeling 34 (2001) 311–318.

[14] S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.

[15] Q. Yao, Successive iteration and positive solution for nonlinear second-order three-point boundary value problems, Computers and Mathematics with Applications 50 (2005) 433–444.

[16] Y. K. Zou, Q. W. Hu, R. Zhang, On the numerical studies of multi-point boundary value problem and its fold bifurcation, Applied Mathematics and Computation 185 (2007) 527–537.

[الف] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم،۱۳۹۰

[ب] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم،۱۳۹۰

[پ] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم،۱۳۹۰

[ر] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم،۱۳۹۰

[ز] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم،۱۳۹۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمالی	Probabilistic
ارزیابی	Valuation
اندازه	Measure
پایدار	Stably
توپولوژی ضعیف	Weak Topology
دامنه‌توانی	Powerdomain
فضای تابع	Function Space
دامنه معنایی	Semantic Domain
قطعه‌برنامه	Program Fragment
مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار	Dcpo
مرتب	Ordered

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار .... Dcpo

فضای تابع .... Function Space

اندازه .... Measure

مرتب .... Ordered

دامنه‌توانی .... Powerdomain

احتمالی .... Probabilistic

قطعه‌برنامه .... Program Fragment

دامنه معنایی .... Semantic Domain

پایدار .... Stably

ارزیابی .... Valuation

توپولوژی ضعیف .... Weak Topology

Abstract

A map $\theta : A \to B$ between algebras A and B is called n-multiplicative if

$$\theta(a_1 a_2 \cdots a_n) = \theta(a_1)\theta(a_2)\cdots\theta(a_n)$$

for all elements $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. If θ is also linear then it is called an n-homomorphism. This notion is an extension of a homomorphism. We obtain some results on automatic continuity of n-homomorphisms between certain topological algebras, as well as Banach algebras. The main results are, extensions of Johnson's theorem for surjective n-homomorphisms, a theorem due to C. E. Rickart for dense range n-homomorphisms, and two theorems due to E. Park and J. Trout for $*$-preserving n-homomorphisms on *lmc* $*$-algebras. Also, we show that for a commutative regular Fréchet algebra $(A, \{p_r\})$, $A/\ker p_m$ is a Fréchet Q-algebra if $\pi_m^{-1}(\mathrm{Rad}A_m) \subseteq \ker p_m$, where A_m is the completion of $A/\ker p_m$ with respect to the norm $p'_m(x + \ker p_m) = p_m(x)$ $(x \in A)$ and $\pi_m : A \to A_m$ is the natural projection, $x \mapsto x + \ker p_m$. Then we show that if $(A, \{p_r\})$ is a commutative regular Fréchet algebra such that $\pi_r^{-1}(\mathrm{Rad}A_r) \subseteq \ker p_r$ for all large enough $r \in \mathbb{N}$, $(B, \{q_r\})$ is a commutative semisimple Fréchet algebra and T is an n-homomorphism from A into B such that $T(\ker p_r) \subseteq \ker q_r$ for all large enough $r \in \mathbb{N}$, then T is continuous. Next, we study the automatic continuity of A-module homomorphisms from a Fréchet A-module into a Banach A-module, where A is a unital Fréchet algebra. Finally, we show that if A is a unital Fréchet algebra with a continued bisection of the identity and B is a Banach algebra, then every homomorphism $\theta : A \to B$ is automatically continuous.

2010 Mathematics Subject Classification : Primary 46H40, 46H05; Secondary 46K05, 46J05.

Keywords: Automatic continuity, n-homomorphism, Topological algebras, *lmc* algebras, Q-algebras, Fréchet algebras, Regular Fréchet algebras, Semisimple, Strongly semisimple, Factorizable algebras, Module homomorphism, n-involution, *lmc* $*$-algebras, $*$-preserving n-homomorphisms, Continued bisection of the identity, Fréchet A-module.

Shahrekord University
Faculty of Science

Pure Mathematics
Mathematical Analysis

Automatic Continuity of Homomorphisms and Module Homomorphisms on Banach Algebras and Topological Algebras

Msc Seminar

Supervisor

First Supervisor

Advisor

First Advisor

By

Hamid Shayanpour

2011